Partie 1 — Encodage de problèmes vers SAT

Antoine Gontard antoine.gontard@inria.fr
Raphaël Berthon rberthon@lmf.cnrs.fr

Dans cette première partie du projet, nous allons automatiser la résolution de plusieurs problèmes logiques. Pour ce faire, nous allons tous les réduire à un même type de problème, la satisfaisabilité d'une formule booléenne (ou juste SAT). Ensuite, nous résoudrons ces instances de SAT toutes de la même façon, c'est-à-dire en appelant `minisat` un solveur déjà existant. Plus précisément, chaque instance `I` d'un problème devra être encodée (en temps polynomial) en une instance `S` de SAT, telle que `S` est satisfiable ssi `I` a une solution. De plus, vous devrez extraire (encore une fois en temps polynomial) une solution de `I` à partir d'une affection des variables satisfaisant `S`. Toutes les solutions de `I` n'ont pas à être obtenues de cette façon.

Vous trouverez la base de code ici[1]. Le module OCaml fourni `Dimacs` vous aidera pour la gestion des formules booléennes, tands que le module `Kosaraju` vous aidera pour le solveur 2SAT. L a documentation de ces modules peut être générée dans le dossier `html/` à l'aide de la commande `make doc`. Pour compiler et tester le projet, vous aurez besoin d'ocaml, de minisat, et des paquets opam `cairo2` (pour l'affichage des pavages uniquement), `ocamlfind` et `camlp-streams`.

Exercice 1 —— Carré latin

Le fichier `src/latin.ml` montre comment encoder le carré latin en SAT (l'entrée `N` est la taille du carré). On peut le tester avec par exemple la commande `make N=10 test_latin`. Cependant, cet encodage peut être amélioré: essayez de modifier le fichier, en ajoutant des clauses afin d'aider le solveur.

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

Exercice 2 —— Carré gréco-latin

Adaptez `src/latin.ml` en `src/greek.ml` pour encoder le problème du carré gréco-latin.

Aα	Bγ	Cδ	Dβ
Bβ	Aδ	Dγ	Cα
Cγ	Dα	Aβ	Bδ
Dδ	Cβ	Bα	Aγ

[1] L'archive contient aussi les fichers pour le projet SAT (Partie 4 du cours), pour le moment vous pouvez les ignorer.

Exercice 3 —— Sudoku

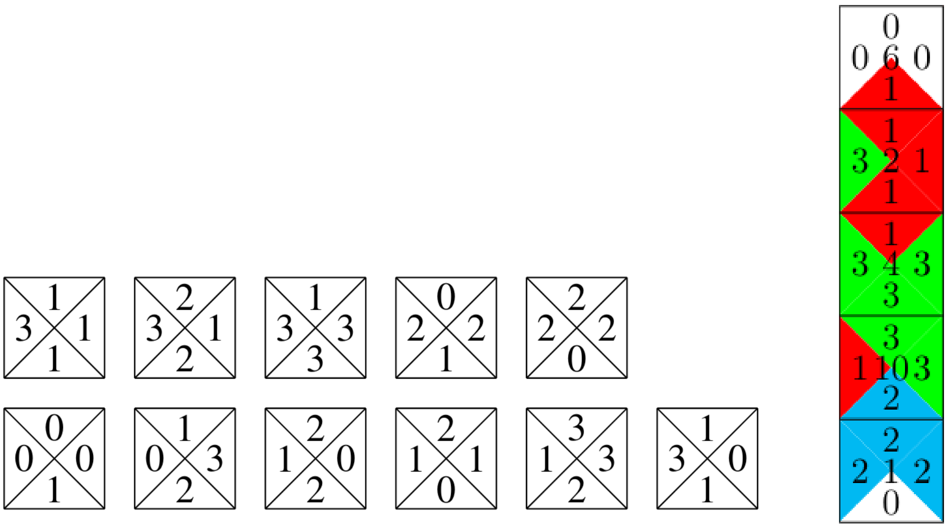
Dans le fichier `src/sudoku.ml`, encodez un solveur de sudoku. Une grille sera représentée par une suite de 81 chiffres entre 0 et 9 (lus de gauche à droite et de bas en haut), avec le 0 signifiant un emplacement vide. Par exemple, l'encodage de la grille ci-dessous est : `530070000600195000098000060800060003400803001700020006060000280000419005000080079`. Le fichier `src/sudoku.ml` gèrera l'encodage entre ce format et SAT, tandis que `src/pp_sudoku.ml` transformera les suites de chiffres en leur représentation habituelle.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Pour ce qui est du test, la commande `make GRID=... test_sudoku` appellera votre programme sur la grille donnée et affichera joliment le résultat (par défaut c'est encore celle ci-dessus), tandis que `make tests_sudoku` lira le fichier `problems/sudoku.csv` et testera votre programme sur tous les sudoku contenus dans le csv (sans affichage joli, au vu du nombre de tests).

Exercice 4 —— Pavage de Wang

Jeandel et Rao ont trouvé un ensemble de 11 tuiles de Wang qui est apériodique et minimal pour cette propriété. Les tuiles en question sont représentées sur l'image de gauche. Sur la droite, on a un exemple d'un schéma vertical de 5 tuiles (ignorez les nombres au centre des tuiles sur l'image).



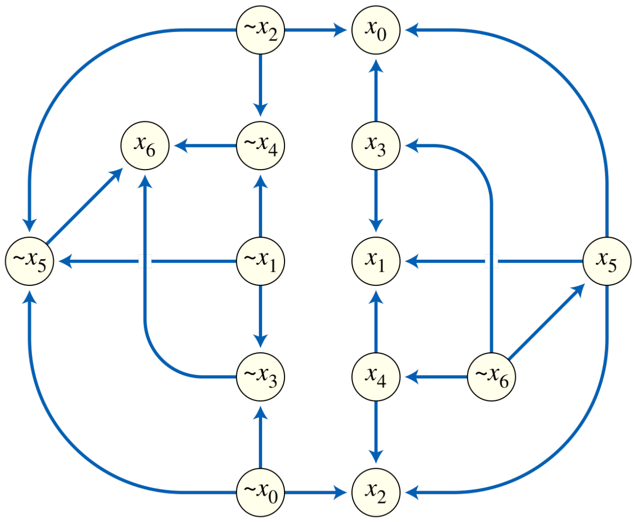
Créez le binaire `jr`, qui encode le problème de pavage avec cet ensemble de 11 tuiles sur un carré de dimension $N \times N$, avec une contrainte: le motif de cinq tuiles ci-dessus doit se trouver au milieu du pavage, c'est-à-dire sur la colonne $\frac{N}{2}$ et des lignes $\frac{N}{2} - 1$ à $\frac{N}{2} + 2$. Un pavage devrait exister pour $N = 70$, mais pas pour $N = 80$.

Le fichier `src/jr_cairo.ml` permet de convertir vos pavages en SVG afin de les visualiser. Il contient en commentaire des instructions à propos de comment représenter les pavages en ascii en utilisant A, B, C, ..., K pour désigner les tuiles dans l'ordre (de droite à gauche et de haut en bas dans l'image ci-dessus). Le Makefile contient une cible `make N=70 test_jr` pour tester tout cela.

Exercice 5 —— Problème 2-SAT

Le problème 2-SAT est une restriction du problème SAT où chaque clause est de taille au plus 2. Il s'agit de décider si une formule booléenne en forme normale conjonctive (CNF) est satisfaisable.

Le problème 2-SAT admet un algorithme polynomial. Celui-ci consiste à définir un graphe orienté, appelé graphe d'implication, dont les sommets sont, pour chaque variable propositionnelle p, les deux littéraux p et ¬p. Chaque clause est alors transformée en des arêtes de ce graphe : une clause $(a \lor b)$ donne les arêtes $\neg a \longrightarrow b$ et $\neg b \longrightarrow a$. La formule n'est pas satisfaisable si et seulement s'il existe un littéral et sa négation appartenant à la même composante fortement connexe du graphe.



Écrivez un solveur 2-SAT dans `src/twosat.ml`. Pour vous aider, un squelette vous est donné, mais vous n'êtes pas obligé de le suivre. Le module `Kosaraju` offre une fonction `scc` retournant les composantes fortement connexes d'un graphe, mais vous pouvez librement utiliser un autre algorithme (comme l'algorithme de Tarjan).

Lorsqu'une formule est SAT, il n'est pas nécessaire de fournir une valuation. Cependant, produire une valuation correcte en exploitant la structure des composantes fortement connexes et en justifiant pourra donner lieu à un (très petit) bonus. Enfin, des exemples de formules sont fournis dans le dossier `2sat`.

Rendu 1 —— Dimanche 8 février 23h59

Envoyez vos fichers sous la forme d'une archive `nom_prénom.tar.gz` contenant l'intégralité de vos fichers ainsi qu'un readme contenant :

- La liste des exercices rendus, il faut obligatoirement rendre les exercices 2,3 et au choix l'un des exercices 4 et 5. Les exercices rendus en plus pourront compter en bonus.
- Si vous avez rencontré des problèmes, n'hésitez pas a les mentionner.

La date de rendu est le Dimanche 8 février 23h59.